Sucesiones y series de funciones complejas

$$\alpha_n : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

Teorema:

Sea $\alpha_n : A \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto A

a) Si α_n converge uniformemente a α en todo disco cerrado contenido en A.

Entonces: α es holomorfa en A y

$$\alpha_n'(z) \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha'(z)$$

(y la convergencia $\alpha_n' \to \alpha'$ es uniforme en cada disco cerrado en A)

b) (Para series) Si $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ converge uniformemente a α en cada disco cerrado en A, entonces α es holomorfa en A y $\alpha'(z) = \lim_{n\to\infty} S_n'(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k'(z)$

$$\alpha'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k'(z)$$

(y la convergencia es uniforme en cada disco cerrado en A)

Teorema Sea $\alpha_n : A \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones continuas en el abierto A, y C un contorno en A.

a) Si α_n converge uniformemente a α en C, entonces:

$$\int_C \alpha_n \xrightarrow{n \to \infty} \int_C \alpha$$

b) Si $S_n = \sum \alpha_k$ c.u. a α en C, entonces: $\displaystyle\int_C \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_n(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C \alpha_n(z)\,dz$

(A): $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ (B): $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ (C) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$

Convergencia puntual:

(A). Converge absolutamente si $|z|<1$ → converge puntualm. si $|z|<1$

Diverge si $|z| \geq 1$ porque el término z^k no converge a 0.

(B) sea $|a_k| = \frac{|z|^k}{k}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|z|^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{k}{|z|^k} = |z| \cdot \frac{k}{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} |z|$$

$z \neq 0$

⇒ si $|z|<1$ ⇒ la serie converge abs. ⇒ conv. puntualmente

Si $|z|>1$ ⇒ la serie diverge porque $\frac{z^k}{k} \not\to 0$ (no conv. a 0)

si $|z|=1$? $z = e^{it}$

$\sum \frac{z^k}{k} = \sum \frac{e^{ikt}}{k}$ Por Dirichlet: $a_k = e^{ikt}$ tiene sumas parciales acotadas si $t \neq 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$ y $b_k = \frac{1}{k}$ real positiva decreciente a 0

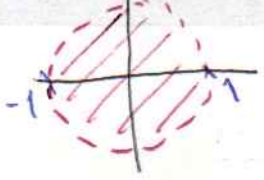
converge si $t \neq 2m\pi$ ← condicionalmente

(C) $|a_n(z)| = \left|\frac{z^k}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$ si $|z| \leq 1$

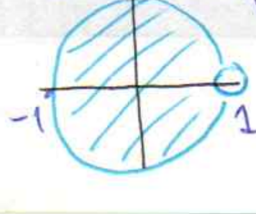
Como $\sum \frac{1}{k^2}$ converge ⇒ (criterio Weierstrass) $\sum \frac{z^k}{k^2}$ C.U. si $|z| \leq 1$.

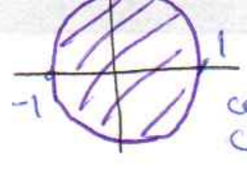
si $|z|>1$ ⇒ la serie diverge porque $\frac{z^k}{k^2} \not\to 0$ (no converge a 0)

campo convergencia (A)



campo conv. (B)





campo conv. (C)

Convergencia uniforme?

(A) Si $|z| \leq r < 1$:

$$|z^k| \leq r^k \quad \text{y} \quad \sum r^k \text{ converge} \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{(Weierstrass)}}}{} \sum z^k \text{ C.U. en } D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$$

$0 < r < 1$

no C.U. en $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

Veamos por definición:

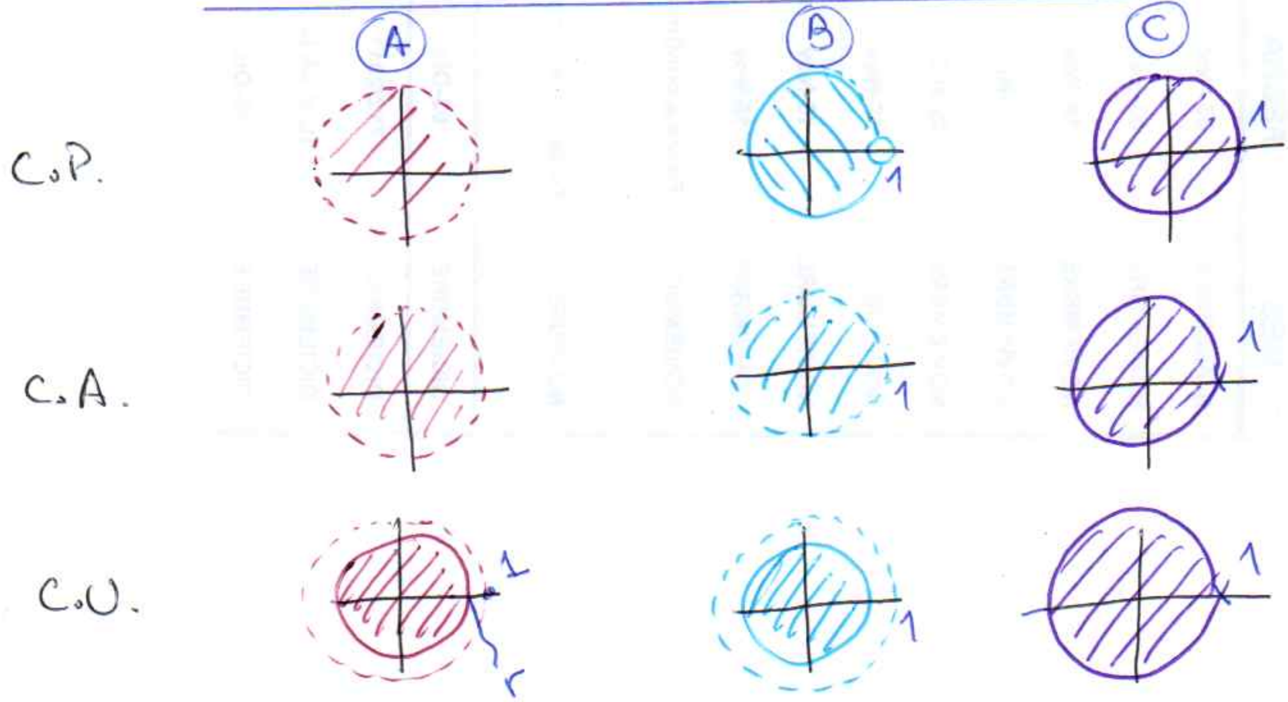
$$\sup\left\{ \left| \sum_{k=0}^{n} z^k - \underbrace{\frac{1}{1-z}}_{\text{límite puntual}} \right| , z \in D \right\} = \sup\left\{ \left| \frac{1-z^{n+1}}{1-z} - \frac{1}{1-z} \right| , z \in D \right\}$$

$$= \sup\left\{ \left| \frac{z^{n+1}}{1-z} \right| , |z| < 1 \right\} = \sup\left\{ \left| \frac{1}{1-z} \right| , |z| < 1 \right\} = \infty$$

(B) si $|z| \leq r < 1$ $\quad \frac{|z|^k}{k} \leq \frac{r^k}{k} \leq r^k < 1$ y $\sum r^k$ converge $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum \frac{z^k}{k}$ C.U. en $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$

(C) C.U. en $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.



A qué convergen?

(A) $$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}}$$ si $|z|<1$

(B) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = \alpha(z) \,?$$

Serie de derivadas: $$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z^k}{k}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} \underset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{\infty} z^j \overset{|z|<1}{=} \frac{1}{1-z} = \alpha'(z)$$

$$\Rightarrow \alpha(z) = -\operatorname{Log}(1-z) + c \quad \text{si } |z|<1$$

$$\alpha(0) = \sum \frac{0^k}{k} = 0 = -\operatorname{Log}(1-0)+c \Rightarrow c=0$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = -\operatorname{Log}(1-z)} \quad |z|<1$$

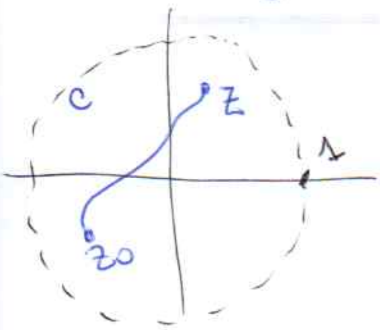
a qué converge: $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k} \underset{z=\frac{1}{2},\ |z|<1}{=} -\operatorname{Log}(1-1/2) = -\ln\left(\tfrac{1}{2}\right)^{+i0} = \ln 2$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5^k . k} \underset{z=\left(-\frac{1}{5}\right)}{=} -\operatorname{Log}(1+1/5) = -\ln(6/5)$$

(C) $$\sum \frac{z^k}{k^2} = \,?$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_C \frac{z^{k-1}}{k} dz = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} + c \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} = \sum_{1}^{\infty} \int_C \frac{z^{k-1}}{k} dz = \int_C \sum_{1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k} dz$$

$$= \int_C \frac{1}{z} \sum_{1}^{\infty} \frac{z . z^{k-1}}{k} dz = \int_C -\frac{1}{z} \operatorname{Log}(1-z)\, dz$$



Series de potencias

Dado z_0, y una sucesión numérica $(a_n)_{n=0}^{\infty}$

la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ se llama $\longrightarrow \left(\sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k\right)_{n=0}^{\infty}$

serie de potencias con centro en z_0

$(a_n)_{n=0}^{\infty}$: sucesión coeficientes de la serie

sucesión de sumas parciales (sucesión de polinomios)

Ej:

$$1+(z-z_0)+(z-z_0)^2+\dots = \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k \qquad \text{coef: } a_k = 1$$

$$1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \text{coef: } a_k=\frac{1}{k!} \qquad \text{centro: } z_0=0$$

$$z+2z^2+3z^3+\dots = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot z^k \qquad \text{coef } a_k=k \qquad \text{centro } z_0=0$$

Convergencia?

$\sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k$ converge si $|z-z_0|<1$, diverge si $|z-z_0|\geq 1$.

campo de convergencia: $A_0=\{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|<1\}$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ convergencia absoluta? si $z\neq 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left|\frac{z^k}{k!}\right|}_{b_k} \qquad \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{|z|^k} = \frac{|z|}{k+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|z|}{k+1} = 0$$

para todo z.

$A_0=\mathbb{C}$

$\sum_{k=0}^{\infty} k!\, z^k$ convergencia absoluta?

$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{|k!|\,|z|^k}_{b_k > 0}$ $\qquad \dfrac{b_{k+1}}{b_k} = \dfrac{(k+1)!\,|z|^{k+1}}{k!\,|z|^k} = (k+1)\,|z|$

$\lim_{k\to\infty} \dfrac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k\to\infty} (k+1)\,|z| = \infty > 1$ $\quad \uparrow z \neq 0$

$\Rightarrow$ no converge absolutamente para $z \neq 0$.

$\sum_{k=0}^{\infty} k!\, z^k$ como $\lim_{k\to\infty} k!\, z^k \neq 0$ para $z \neq 0$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k!\, z^k$ no converge si $z \neq 0$

Teorema (Cauchy-Hadamard)

La serie de potencias $\Big(\overbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k}^{S_n}\Big)_{n=0}^{\infty}$ $\qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$

tiene un campo de convergencia puntual A_0 que es alguno de estos casos:

a) $A_0 = \{z_0\}$

b) $B(z_0,R) \subset A_0 \subset \overline{B}(z_0,R)$, para algún R
↳ bola cerrada

c) $A_0 = \mathbb{C}$

Radio de convergencia: en caso b: ese R
" " a: $R=0$
" " c: $R=\infty$

Además: si $R>0$, la convergencia es absoluta para todo $z \in B(z_0,R)$.

Además: si $R>0$, la función límite:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \text{es holomorfa en } B(z_0,R)$$

y su derivada en cada punto es:

$$f'(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot k\,(z-z_0)^{k-1}$$

y esta serie tiene radio de convergencia R.

Además: si $R>0$ la convergencia es uniforme en $\overline{B}(z_0,r)$ ~~para todo~~ con $r<R$

Además: cálculo de R:

a) si existe $L=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} \Rightarrow R=\frac{1}{L}$

b) si existe $L'=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \Rightarrow R=\frac{1}{L'}$

Ej: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^k}$ $z_0=0$, $a_k=\frac{1}{2^k}$ $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=\frac{1}{2}=L$

$\Rightarrow \boxed{R=2} \Rightarrow A_0=\{z\in\mathbb{C}: |z|<2\}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^k}=\sum\left(\frac{z}{2}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{2}{2-z}$$

si $\left|\frac{z}{2}\right|<1$

$|z|<2$

Ejemplos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(z-z_0)^k}{2^k}$$ converge a una f. holomorfa en $B(z_0,R)$ R?

$$a_k = \frac{k}{2^k}(z-z_0)^k$$

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{k+1}{2^{k+1}} \frac{|(z-z_0)^{k+1}| \cdot 2^k}{k\,|z-z_0|^k} = \frac{k+1}{k \cdot 2}|z-z_0| \xrightarrow{k\to\infty} \frac{|z-z_0|}{2}$$

$\Rightarrow$ converge abs. si $\frac{|z-z_0|}{2} < 1 \iff |z-z_0| < 2 = R$.

$\Rightarrow$ converge puntualmente si $|z-z_0|<2$.

y en la frontera?

si $|z-z_0| = 2 \Rightarrow z = z_0 + 2 \cdot e^{it} \Rightarrow (z-z_0)^k = e^{ikt} \cdot 2^k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} \cdot e^{ikt} \cdot 2^k = \sum k e^{ikt}$$ diverge porque $k e^{ikt} \not\to 0$.

A qué converge? $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}(z-z_0)^k = f(z) \Rightarrow$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)\, k \cdot \frac{(z-z_0)^{k-1}}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)}{2^k} \cdot \left((z-z_0)^k\right)'$$

$$= (z-z_0) \cdot \sum \frac{1}{2^k}\left((z-z_0)^k\right)' = (z-z_0)\left[\sum_0^{\infty} \frac{1}{2^k}(z-z_0)^k\right]'$$

$$= (z-z_0)\left[\sum \left(\frac{z-z_0}{2}\right)^k\right]' = (z-z_0)\left[\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{2}\right)}\right]' =$$

$$= (z-z_0) \cdot \frac{1}{2 \cdot \left[1-\left(\frac{z-z_0}{2}\right)\right]^2} = \frac{2(z-z_0)}{(2-(z-z_0))^2} = f(z)$$

Ejemplo: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = f(z)$ $z \in \mathbb{C}$, f holomorfa.

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k z^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0} \frac{z^j}{j!}$$

$$f'(z) = f(z)\ ! \Rightarrow \boxed{f(z) = e^z}$$

$$\frac{1}{e} = f(-1) = \sum \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$

Teorema:

Sea $f : B(z_0, R) \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$.

Entonces f es indefinidamente derivable en $B(z_0, R)$.

Además:
$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

$$f(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_0 - z_0)^k = a_0$$

$$f'(z) = \sum_{1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} \Rightarrow f'(z_0) = a_1 \cdot 1$$

$$f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)(z - z_0)^{k-2} \Rightarrow f''(z_0) = a_2 \cdot 2 \cdot 1$$

$$f'''(z) = \sum_{3}^{\infty} a_k k(k-1)(k-2)(z - z_0)^{k-3} \Rightarrow f'''(z_0) = a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Analiticidad

Sea $f : D \to \mathbb{C}$, D abierto. f es analítica en D si para todo $z_0 \in D$ existe $r > 0$, y coef $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ tal que:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{para todo } z \in B(z_0, r)$$

Operaciones con series

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \qquad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$$

para todo $z \in B(z_0, r)$, entonces:

$$(f+g)(z) = \sum_{0}^{\infty} (a_k + b_k)(z-z_0)^k$$

$$(\lambda f)(z) = \sum_{0}^{\infty} (\lambda a_k)(z-z_0)^k \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

$$(f \cdot g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + a_{k-2} b_2 + \dots + a_0 b_k)(z-z_0)^k =$$

$$= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)(z-z_0) + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)(z-z_0)^2 + \dots$$

Teorema de Taylor.

Sea $f: D \to \mathbb{C}$, holomorfa en el abierto D, $z_0 \in D$.

Entonces $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ para $z \in B(z_0, r)$

donde $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ y r es tal que $B(z_0, r) \subset D$.

(holomorfa $\Longleftrightarrow$ analítica)

Ejemplos

$$e^z = \sum_{0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad (z_0 = 0) \quad \text{en } \mathbb{C}$$

$$\operatorname{sen} z = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{en } \mathbb{C}$$

$$\cos z = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{en } \mathbb{C} \qquad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{0}^{\infty} z^k \qquad |z| < 1$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{0}^{\infty} (-1)^k z^k \qquad |z| < 1$$

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1} \qquad |z| < 1$$

$$\int \frac{1}{1+z} dz$$

$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

Ejemplos

① $f(z) = \frac{1}{5+z^2} = \frac{1}{5\left(1+\frac{z^5}{5}\right)} = \frac{1}{5}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{z^2}{5}\right)} =$

$= \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z^2}{5}\right)^k = \sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{5^{k+1}}$ $\qquad |z| < \sqrt{5}$

$\left|-\frac{z^2}{5}\right| < 1$

$= \frac{1}{5} - \frac{z^2}{5^2} + \frac{z^4}{5^3} - \frac{z^6}{5^4} + \cdots$

② $f(z) = \frac{2z+1}{z+3} = \frac{2(z+3)-6+1}{z+3} = 2 - \frac{5}{3\left(1-\left(-\frac{z}{3}\right)\right)} =$

$= 2 - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{z}{3}\right)^k = 2 - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{5}{3^{k+1}}(-1)^k\cdot z^k$

$\left|\frac{z}{3}\right| < 1$

$= \underbrace{2-\frac{5}{3}}_{a_0} + \underbrace{\frac{5}{3^2}}_{a_1} z - \underbrace{\frac{5}{3^3}}_{a_2} z^2 + \cdots$ $\qquad |z| < 3$

$f''(0) = a_2 \cdot 2! = -\frac{5}{27}\cdot 2 = -\frac{10}{27}$

③ $f(z) = \frac{7}{z-3}$ con centro $z_0 = 1$.

$\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$

$f(z) = \frac{7}{z-1-2} = \frac{7}{-2}\,\frac{1}{1-\left(\frac{z-1}{2}\right)} = -\frac{7}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^k = \sum_{0}^{\infty} -\frac{7}{2^{k+1}}(z-1)^k$

$= -\frac{7}{2} - \frac{7}{2^2}(z-1) - \frac{7}{2^3}(z-1)^2 - \frac{7}{2^4}(z-1)^3 - \cdots$ $\qquad |z-1| < 2$